

*А.Ю. ТАНЧЕНКО*, мл. науч. сотр. каф. ТММ и САПР, НТУ «ХПИ»

## **СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА УТОНЕНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ШАРНИРНО ОПЕРТОГО СТЕРЖНЯ**

У статті описано загальний підхід до розв'язання зв'язаної задачі про напружено-деформований стан та корозійне стоншування елементів машинобудівних конструкцій. Проілюстрований аналіз зв'язаних процесів на прикладі шарнірно опертого стрижня.

In article the general approach to the decision of the connected problem of the stressedly-deformed state and corrosion damage of elements machine-building designs is described. The analysis of the connected processes on an example a joint support core on hinges is shown.

**Введение.** Большое количество машиностроительных конструкций работает в условиях коррозионного или другого вида износа. При этом их напряженно-деформированное состояние (НДС) зависит от степени утонения, вызванного этим износом. Особенно это актуально для тонкостенных конструкций, у которых толщина стенки может уменьшиться за срок службы при действии этих факторов до 20-25% и более. В свою очередь, скорость утонения может зависеть от напряженно-деформированного состояния. Таким образом, возникает связанная задача определения НДС тел и их утонения, в свою очередь зависящего от НДС. В работе описана общая постановка этой задачи, а также рассмотрены частные случаи на примере шарнирно опертого стержня.

**Постановка задачи.** Пусть в первоначальный момент времени  $t_0 = 0$  исследуемое тело занимает область  $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ . Учитывая, что процесс коррозионного износа является достаточно медленным, то в случае приложения статической нагрузки  $f$  его НДС описывается системой дифференциальных уравнений теории упругости [1]:

$$L(u)|_{\Omega} = f, \quad (1)$$

где  $L$  - дифференциальный оператор системы уравнений теории упругости в перемещениях.

При этом область  $\Omega$  на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  изменяется (рис.1):

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) - \Delta\Omega(t)\Delta t. \quad (2)$$

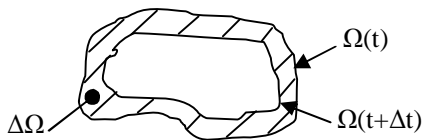


Рисунок 1 – Изменение области  $\Omega$  в процессе коррозионного утонения

Зависимость скорости изменения от параметров НДС определяется на основе решения дополнительной задачи или устанавливается эмпирическим путем. В частности, предложено [2-4] множество моделей утонения. Так, например, модель Долинского для тонкостенных элементов определяет скорость утонения в дифференциальной форме как функцию интенсивности напряжений  $\sigma$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C_1 - C_2 S(z, t) \cdot \quad (3)$$

Учитывая, что  $S = S(u)$ , то система уравнений (1-3) определяет связанную задачу, которую необходимо решать совместно.

**Метод решения.** Рассмотрим связанную задачу (1-3) для тонкостенных элементов машиностроительных конструкций. Тогда, обозначая через  $S$  срединную поверхность тела, область  $\Omega$  можно представить в виде

$$\Omega = S \times h \quad (4)$$

Учитывая, что в выражении (4) наиболее существенное влияние оказывает именно толщина  $h(t)$ , то можно положить  $S = const$ . Тогда система уравнений (1-4) записывается относительно переменных  $(u, h)$ . При этом для частных случаев тонкостенных элементов эти уравнения можно трансформировать к виду:

$$L_S(u, h) = f_S \quad (5)$$

где  $L_S$  - оператор, определенный на области  $S$  (например, для срединных поверхностей пластин, оболочек или стержней),

$h$  – параметр, определяемый уравнением (3).

Принимая во внимание, что в случае медленного процесса утонения  $h(t)$  напряженно-деформированное состояние тела изменяется плавно, можно провести дискретизацию во времени соотношений (3), заменив непрерывное изменение  $h(t)$  на кусочно-линейное:

$$h(t_{k+1}) = h(t_k + \Delta t_k) \approx h(t_k) + \frac{\partial h}{\partial t}(t_k) \cdot \Delta t_k. \quad (6)$$

Тогда для моментов времени  $t_k, k = 0, 1, \dots$ , получаем последовательность задач

$$L_S(u, h_k) = f_S, \quad (7)$$

которые можно решать традиционными методами механики сложной среды, а между полученными полями  $u_k = u(t_k)$  провести кусочно-линейную аппроксимацию во времени.

**Частный случай стержня на шарнирном опирании.** Рассмотрим иллюстрацию предложенного подхода на частном случае изгиба шарнирно опертого стержня (полосы) (рис.2) прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ .

Предположим, что справедливы допущения:

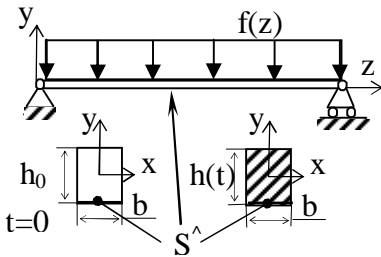


Рисунок 2 - Расчетная схема стержня

1. Коррозионный износ происходит только по нижней части поверхности стержня  $S^$ .
2. Утонение происходит по направлению к начальной нормали поверхности (изменением направления нормали пренебрегаем).
3. Утонение в различных сечениях ( $z = const$ ) происходит не зависимо друг от друга.
4. Утонение по ширине постоянно.

Тогда удастся записать дифференциальную постановку задачи. Уравнение, связывающее изменение толщины с напряженно-деформированным состоянием, выглядит следующим образом:

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot S_z(z, t). \quad (8)$$

где  $C_1, C_2$  - некоторые физико-механические характеристики процесса коррозионного утонения, определяемые свойствами среды и материала,  $S = S_z(z, t)$  - изгибные напряжения на нижней поверхности стержня.

Распределения изгибающих моментов  $M$  в балке описывается уравнением

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = f(z). \quad (9)$$

Максимальные изгибные напряжения

$$S(z, t) = M(z, t) / W, \quad (10)$$

где  $W$  - момент сопротивления (в нашем случае  $W = bh^2/6$ ).

Тогда

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \frac{6 \cdot M(z)}{b \cdot h^2} = -C_1 - \frac{\hat{C}_2(z)}{h^2(t)}, \quad (11)$$

где  $\hat{C}_2 = C_2 \cdot \frac{6 \cdot M(z)}{b}$ .

Заметим, что уравнение (8) довольно затруднительно решить в аналитическом виде, хотя не составляет особого труда реализовать процедуру численного решения. Для решения же в аналитической форме можно записать уравнение в обратной форме, используя обозначения:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{dt/dh} = \frac{1}{t'}. \quad (12)$$

Тогда уравнение коррозионного износа (8) можно записать в следующей форме:

$$t' = -\frac{1}{C_1 + C_2/h^2} = \frac{h^2}{C_1 h^2 + C_2}, \quad (13)$$

и его решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} t(h) &= -\frac{h}{C_1} + \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot h \right) + \tilde{t}; \\ \tilde{t} = t(h_0) &= \frac{h_0}{C_1} + \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot h_0 \right); \\ t(h) &= -\frac{(h - h_0)}{C_1} + \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left( \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} h \right) - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} h_0 \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, получаем зависимость между временем и толщиной корродирующей балки, где  $t(0) = T_{kr}$  - характерное критическое время (время полного растворения наиболее нагруженной зоны).

*Частный случай равномерно распределенной нагрузки ( $q = \text{const}$ ).*

В этом случае уравнение (9) будет иметь вид

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q, \Rightarrow M(z) = \frac{q \cdot z(z-l)}{2}. \quad (15)$$

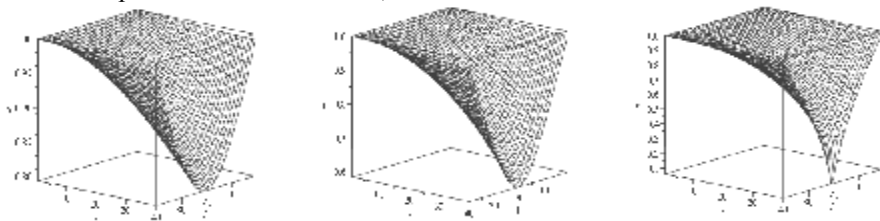
Изгибные напряжения как функция пространственной и временной координат:

$$s(z, t) = \frac{3q \cdot z(z-l)}{b \cdot h^2(t)} . \quad (16)$$

Тогда с учетом (16) закон утонения можно записать в виде

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \frac{3q \cdot z(z-l)}{b \cdot h^2} = -C_1 - \frac{\hat{C}_2(z)}{h^2(t)} . \quad (17)$$

Задаваясь конкретными значениями (для модельной задачи)  $C_1=1$ ,  $C_2=1$ , а также  $l=10$ ,  $q=1$ ,  $b=1$ ,  $h_0=1$ , получаем зависимость напряжений на нижней поверхности  $S^A$ , изменяющиеся во времени (рис.3). На графиках на рис.3 и далее время  $t$  и пространственная координата  $z$  представлены в интервале  $[0..T_{kr}]$  и  $[0..l]$  соответственно (числами обозначены номера точек дискретизации по  $t$  и по  $z$ ).



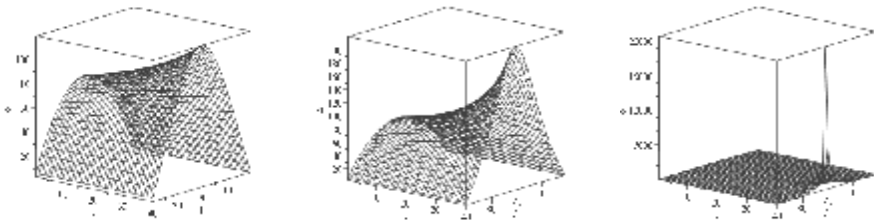
а)

б)

в)

График изменения толщины балки с течением времени под действием распределенной нагрузки

/а)  $t = [0..0,5 T_{kr}]$ , б)  $t = [0..0,8 T_{kr}]$ , в)  $t = [0..T_{kr}]$  /



а)

б)

в)

График изменения изгибных напряжений в балке с течением времени под действием распределенной нагрузки

/а)  $t = [0..0,5 T_{kr}]$ , б)  $t = [0..0,8 T_{kr}]$ , в)  $t = [0..T_{kr}]$  /

Рисунок 3 – Результаты расчета текущей толщины и напряжений в балке

*Случай точечной нагрузки, перемещаемой с постоянной скоростью ( $v=const$ ). Дифференциальное уравнение изгиба запишется в виде*

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q \cdot d(z - vt), \quad (18)$$

где  $d$  – дельта-функция.

В данном случае (при  $q=1$ ) решение можно записать в виде:

$$M(z, t) = H(z - vt)z - H(z - vt)vt - \frac{z}{l}(H(l - vt)l - H(l - vt)vt + H(-vt)vt) + H(-vt)vt, \quad (19)$$

где  $H$  – функция Хевисайда.

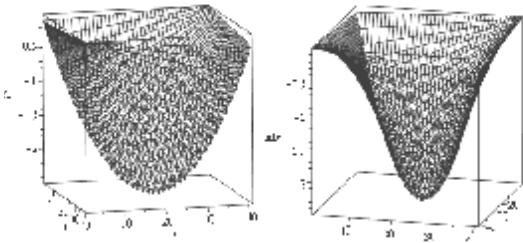


Рисунок 4 – Эпюра изгибающих моментов в балке при действии подвижного груза

На рис. 4 представлен график изменения изгибающего момента в балке с течением времени при перемещении подвижной точечной нагрузки вдоль балки на величину ее длины. Если рассматривать периодический характер движения (например,

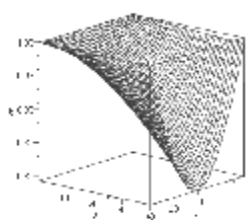
мостового крана-перегрузателя), то следует заметить, что данная эпюра отражает полупериод технологического процесса. В данной постановке (постоянство нагрузки и скорости) количество рабочих циклов может быть легко найдено исходя из параметров той или иной машины.

Интегральная характеристика нагрузки на периоде движения по балке может быть найдена путем интегрирования изгибающего момента по времени. Тогда уравнение, описывающее утонение, запишется так:

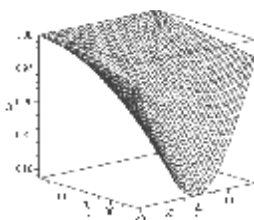
$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \frac{M(z, t)}{W} \approx \frac{6C_2}{b \cdot h(t)^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T M(z, t) dt = -C_1 - \frac{\bar{C}_2(z)}{h(t)^2} \quad (20)$$

Осреднение по периоду возможно вследствие того, что характерное время действия перемещающегося по длине стержня груза намного меньше времени его коррозионного утонения.

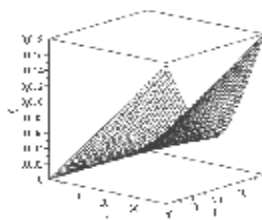
На рисунке 5 представлены графики утонения балки под действием качественно различных напряженно-деформированных состояний – при действии равномерно распределенной и перемещаемой точечной (подвижной) нагрузки. Заметим, что несмотря на качественную внешнюю схожесть графиков, третий столбец (рис.5 в,е,и) наглядно демонстрирует отличие.



а)

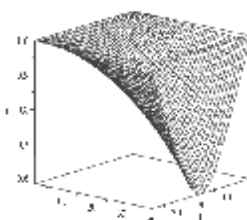


б)

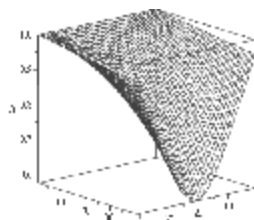


в)

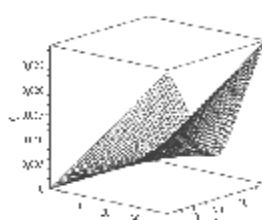
$$t = [0..0,5T_{kr}]$$



г)

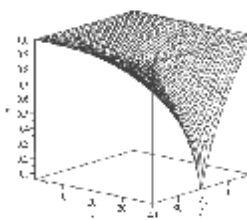


д)

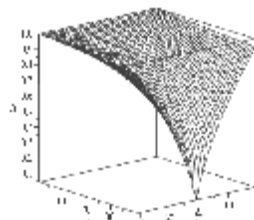


е)

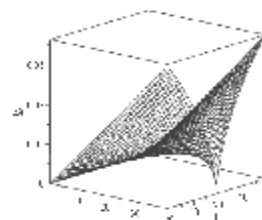
$$t = [0..0,8T_{kr}]$$



ж)



з)



и)

$$t = [0..T_{kr}]$$

I

II

III

Рисунок 5 – Графики изменения толщины балки с течением времени под действием распределенной (I столбец) и подвижной (II столбец) нагрузки III столбец - их абсолютное качественное отличие (на характерном временном интервале  $t$ )

Также заметим, что сравниваются характерные значения для каждого процесса относительно критического времени  $T_{kr}$ , которое в каждом случае различно.

Рис. 6 демонстрирует отличие возникающих в балке изгибных напряжений для случаев двух качественно различных напряженно-деформированных состояний - равномерно распределенной и перемещаемой точечной (подвижной) нагрузки. Для качественного сравнения графики нормируются относительно максимального зарегистрированного напряжения, которое в каждом случае различно, как и критическое время.

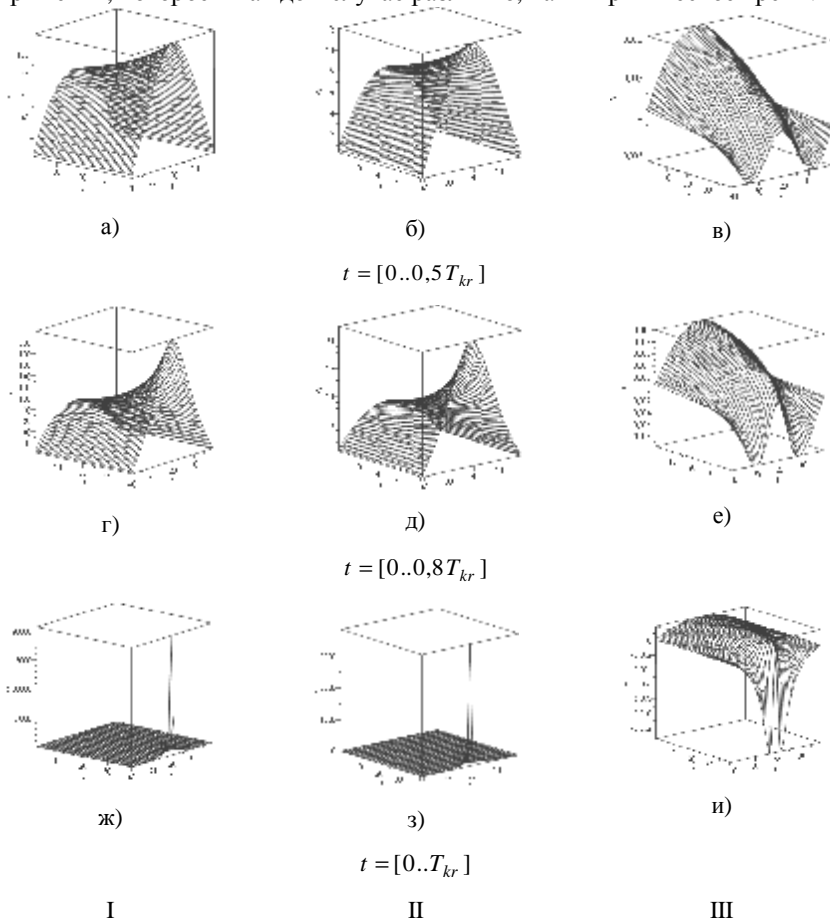


Рисунок 6 – Графики изменения напряжений в балке с течением времени под действием распределенной (I столбец) и подвижной (II столбец) нагрузки III столбец - их абсолютное качественное отличие на характерном временном интервале  $t$  (графики отнормированы относительно максимальных напряжений)

Анализируя графики на рис. 5, 6 и сравнивая НДС для двух качественно различных видов нагружения, можно сделать следующий промежуточный



вывод: несмотря на количественное различие в полученных результатах, качественно процессы износа оказались весьма схожи.

*Определение исходного профиля балки.* Ставится обратная задача: определить такой профиль балки, который выполняет условие запланированного одновременного разрушения во всех сечениях через критическое время.

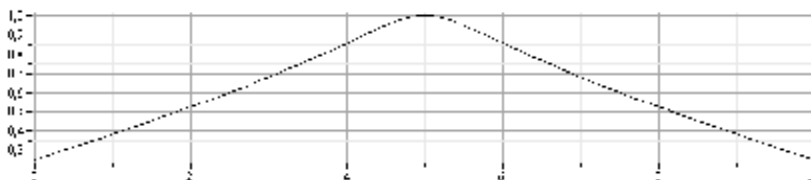


Рисунок 7 – Профиль сечения, обеспечивающий равномерность утонения балки при достижении характерного «критического времени»

Рис. 7 наглядно демонстрирует различие в проектировании с изначальным учетом коррозионного износа. В такой постановке приоритетным является не начальное во времени состояние, а конечное (которые может быть выражено в долях от некоего «критического времени», при котором НДС достигает критических значений одновременно по всей конструкции). Следует обратить внимание, что такой подход не предполагает усиления отдельных зон и элементов, а наоборот, позволяет нагрузить существующие недогруженные, поскольку после выхода из строя одного звена непригодной к использованию оказывается вся конструкция. В данном случае речь идет о срединном сечении шарнирно опертой балки, которое подвергается наибольшему воздействию. В результате этого там происходит наибольшее утонение, и затем разрушение, хотя другие ее зоны остаются в работоспособном состоянии. В статье приводится алгоритм, с помощью которого можно попытаться учесть данный факт и нивелировать его влияние. Так, на рис. 7 видим такой профиль балки, который позволяет под действием напряженного состояния получить равномерное утонение через характерный промежуток времени. Этот профиль получен путем обратного интегрирования уравнения (11). Третий столбец (рис.8), кроме того, что демонстрирует отличие изменений толщин для разных подходов проектирования, может быть интерпретирован с позиции экономии материала, поскольку, как будет видно далее, не увеличивает уровень напряжений, а лишь перераспределяет их.

На рис.9 представлены зависимости напряжений в балке для случаев равномерной по толщине балки в начальный период времени и балки сложного профиля, позволяющего получить равномерность сечения лишь при приближении к некоторому характерному «критическому времени». Анализируя соответствующие графики на рис. 8, можно заметить, что в

случае балки с полученным переменным профилем изгибные напряжения распределяются более равномерно, как за один цикл прохода нагрузки, так и во времени, причем максимальные напряжения остаются на том же уровне. Заметим, что толщина осталась прежней лишь вблизи срединного сечения, к краям существенно сужаясь.

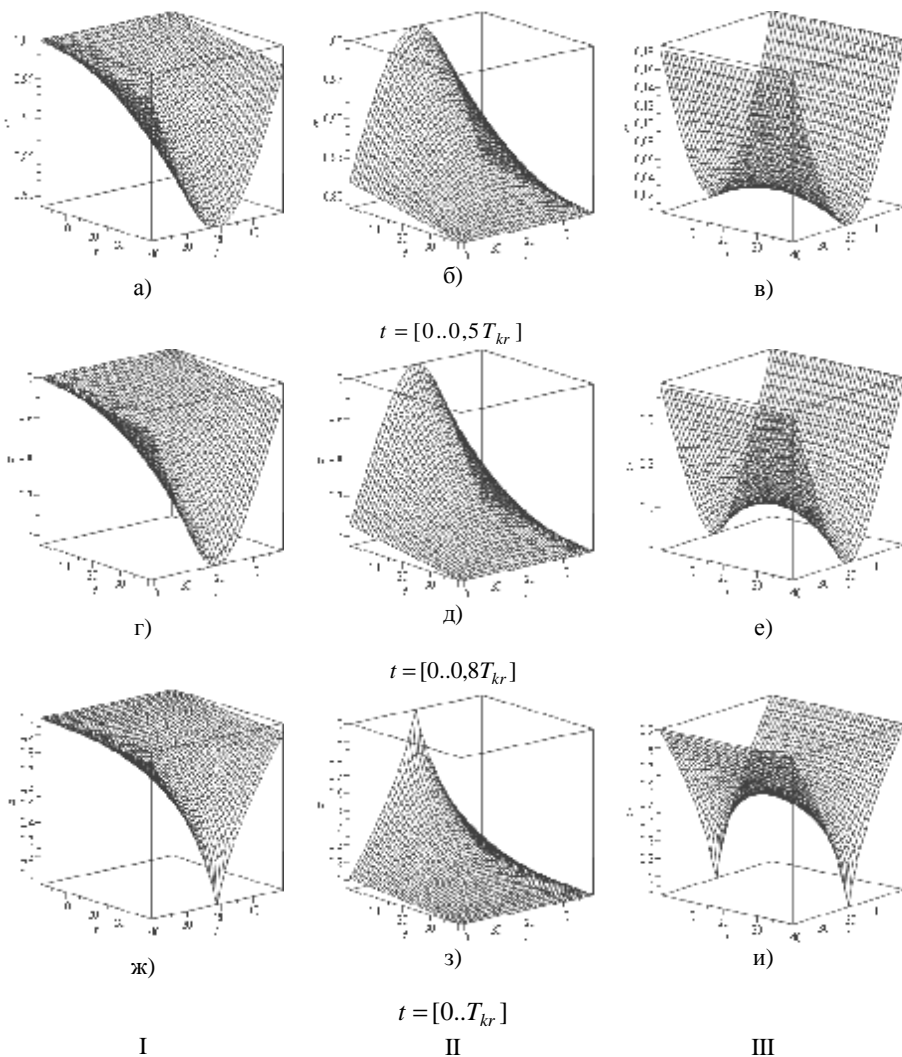


Рисунок 8 – Графики изменения толщины балки с течением времени под действием подвижной загрузки для случая стандартного сечения (I столбец) и запланированного утонения (II столбец), III столбец - их абсолютное отличие

Если  $T_{kr}$  - то время, в течении которого в одном из сечений (в данном случае в среднем) материал растворится полностью, то можно рассматривать процесс в относительном времени  $t = t/T_{kr}$  (см. рис. 3).

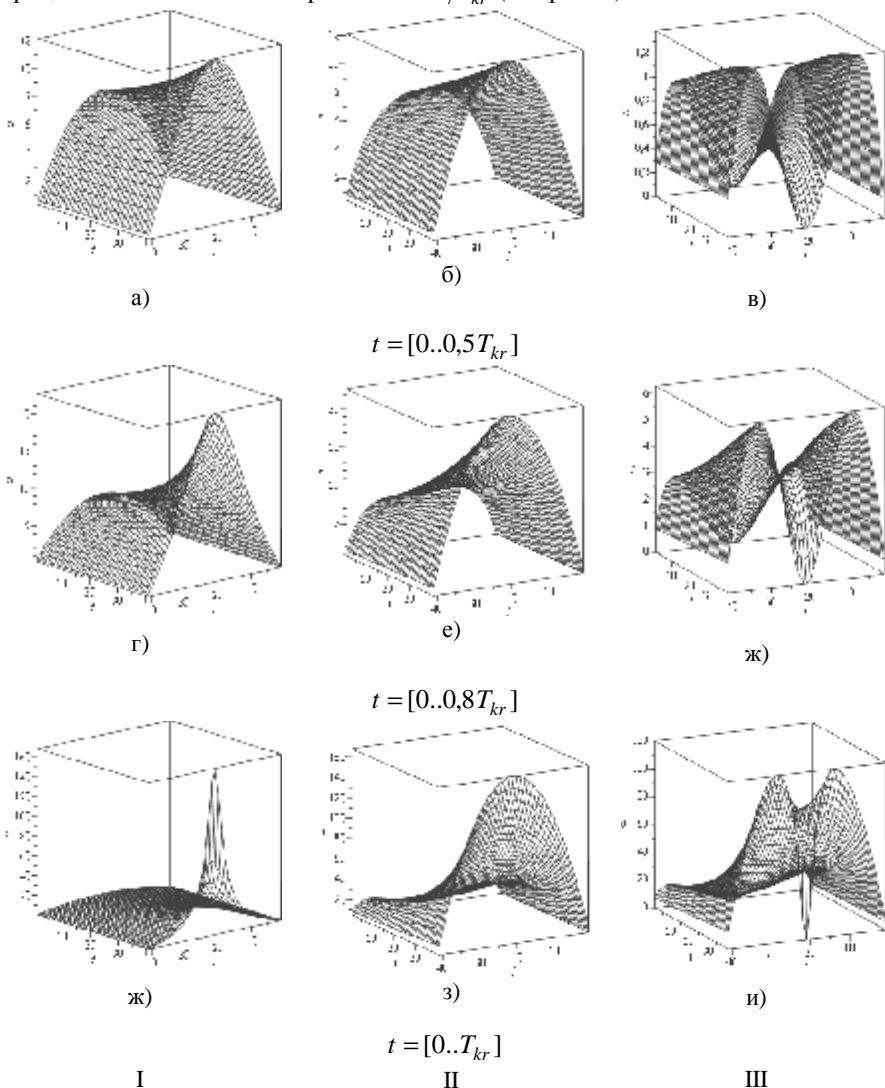


Рисунок 9 – Графики изменения напряжений в балке с течением времени под действием подвижной нагрузки для случая стандартного сечения (I столбец) и запланированного утонения (II столбец)  
III столбец - их абсолютное отличие

Анализ показывает, что утонение носит характер резко прогрессирующего процесса (особенно при приближении  $\tau$  к 1), локализирующегося в средней части стержня. При этом напряжения имеют еще более резко выраженные характеристики неравномерного распределения. В принципе, имея данные зависимости, можно формировать критерии по утонению и напряжениям ( $h(t_1) \geq [h]$ ,  $s(t_2) \leq [s]$ ), что позволяет определить характерные времена  $t_1$  (предельное утонение) и  $t_2$  (предельное напряженное состояние). Выбирая  $t_3 = \min(t_1, t_2)$ , можно вычислить допустимое время эксплуатации конструкции.

Таким образом, модельная задача демонстрирует связанность процесса, неравномерность его распределения во времени и по телу конструкции, а также возможность решения задачи определения допустимого срока службы элемента, подверженного действию механической нагрузки и коррозионного утонения.

**Закключение.** Опираясь на полученные материалы, можно сделать следующие выводы:

§ характер роста напряжений и уменьшения толщины стержня при действии поперечной нагрузки и коррозии стенок является прогрессирующим во времени и локализованным в зоне высоких напряжений.

§ скорость перемещения точечной нагрузки не влияет на характер НДС и следовательно, не оказывает непосредственного влияния на характер коррозионного утонения.

§ задачу анализа можно обратить для оценки долговечности конструкций по предельным толщинам и напряжениям, а также для синтеза рационального профиля (распределение высоты стержня вдоль его продольной оси) с целью достижения заданной несущей способности.

В качестве направления дальнейших исследований можно выделить программно-модельную реализацию предложенного подхода к анализу и синтезу сложных пространственных тонкостенных конструкций.

**Список литературы:** 1. Лурье А.И. Теория упругости // М.: Наука, 1970. – 940с. 2. Долинский В.М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу // Динамика и прочность машин. – 1975. – Вып.21. – С.43-49. 3. Долинский В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. – Саратов, 1983. – С.61-67. 4. Еселева О.В., Медведовська Т.Ф., Гнистько В.І., Стрельникова О.О. Математична модель для розрахунку ресурсу посудин тиску з урахуванням агресивного середовища // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції 2-5 вересня 2008р. – Севастополь, 2008. – С.3-9.

*Поступила в редколлегию 30.09.2010*